Chapitre V

Mouvement d'un point matériel soumis à une force centrale. Problème de Kepler

V-1 Propriétés des mouvements à force centrale conservative

1- a) Définition

Considérons un point de l'espace fixe O que l'on prendra au sommet d'un trièdre $R(o,xyz)$ et un champ de force $\vec{F}$ de la forme $\vec{F} = f(r).\vec{e_r}$;

$\vec{e_r}$ étant le vecteur unitaire porté par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$. En chaque point de l'espace s'exerce une force de cette forme. $r = \|OM\|$ le module du vecteur position.

L'intensité de cette force dépend uniquement que de la distance du point fixe O et de la direction de cette force et suivant cette direction.

Elle est toujours dirigée vers O , O s'appelle centre de force. Quand $f(r) > 0$, la force s'appelle force attractive.

1 - b) Moment cinétrique

Le théorème du moment cinétrique indique que

$$\overrightarrow{M}(O,F) = \frac{d\vec{L}(O)}{dt} \qquad \vec{L}(O) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}$$

$\vec{L}(O)$:moment cinétique du point M
$\vec{M}(O,\vec{F})$: Moment de la force par rapport à O

$$\vec{P} = m\vec{V}(M|_R)$$
$$\vec{M}(O,\vec{F}) = \vec{r} \wedge \vec{F}$$
$$\vec{F} = F(r)\vec{e_r}; \qquad \vec{r} = r\vec{e_r} \qquad \vec{M}(O,\vec{F}) = \vec{0} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \vec{L} = \overrightarrow{Cte}$$

Dans un champ de force centrale, le moment cinétique est une constante de mouvement.

Conséquences:

$\vec{L}=\vec{r}\wedge\vec{P}=\overrightarrow{Cte}$, cette relation indique que $r \perp$ vecteur constant, donc r est situé dans un plan perpendiculaire à cette direction, donc le mouvement est un mouvement plan.

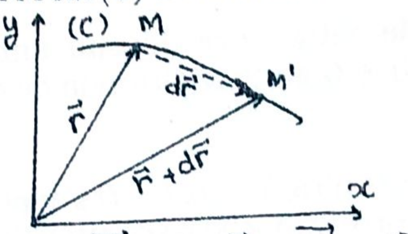
Théorème

Dans un champ de force centrale, la trajetoire d'un point matériel est une courbe plane.

1- c) Loi des aires

Considérons le plan dont lequel s'effectue le mouvement.

Soit (C) la courbe décrite dans le plan du point matériel. A l'insatant t, la position en M sur(C) à l'instant $t+dt \rightarrow en \quad M'$



$|\vec{r}\wedge d\vec{r}| \quad \overrightarrow{OM}=\vec{r} \quad \overrightarrow{OM'}=\vec{r}+d\vec{r} \quad \overrightarrow{MM'}=d\vec{r}$

$|\vec{r}\wedge d\vec{r}|$, représente l'aire du parallélogramme construit à partir de $\vec{r}$ et de $d\vec{r}$.

l'aire balayé par le rayon vecteur OM pendant l'intervalle de temps dt est:

$$dA = \pm \tfrac{1}{2}|\vec{r}\wedge d\vec{r}|$$

l'aire balayé par rapport au temps:

$$\frac{dA}{dt} = \pm\tfrac{1}{2}\left|\vec{r}\wedge\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \pm\frac{1}{2m}|\vec{r}\wedge\vec{p}| = \pm\tfrac{1}{2}|\vec{r}\wedge\vec{v}|$$

$$= \pm\tfrac{1}{2}|L| = Cte, \quad car \quad L = Cte$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{|h|}{2} \qquad avec \quad |h| = |\vec{r}\wedge\vec{v}|$$

<u>Enoncé</u>: dans un champ de force centrale, l'aire balayé par le rayon vecteur est proportionnel au temps mis pour la parcourir

$$dA = \frac{|h|t}{2} + Cte$$

1- d) Vitesse aréolaire

On appelle vitesse aréolaire = $\vec{V}_{aréolaire} = \frac{1}{2}\vec{r}\wedge\vec{v}$

$$\vec{r} = r\vec{e}_r;\quad \vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta; \theta = (\widehat{\vec{e}_x, \overrightarrow{OM}})$$

$$\vec{V}_{aréolaire} = \frac{1}{2}(\vec{r}\wedge\vec{v}) = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}\vec{e}_z = \vec{Cte} \qquad \text{c.à.d } r^2\dot{\theta} = Cte$$

$$\vec{V}_{aréolaire} = \frac{1}{2}h\vec{e}_z \qquad avec \quad h = r^2\dot{\theta}$$

La vitesse aréolaire apparaît comme un vecteur dont la direction est perpendiculaire au plan du mouvement dont le module constant est égale à l'aire balayée / temps par le rayon vecteur position.

1- e) Quantité de mouvement:

$$\vec{F} = m\vec{\gamma} = m\left.\frac{d^2(OM)}{dt^2}\right|_R \quad ; \qquad OM = r$$

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r \qquad \vec{V}(M|_R) = \left.\frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt}\right|_R = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{\gamma}(M|_R) = \left.\frac{d^2(\overrightarrow{OM})}{dt^2}\right|_R = \left.\frac{d(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta)}{dt}\right|_R$$

$$= \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_r - r\dot{\theta}^2\vec{e}_r$$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$$

$$f(r) = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad (1) \qquad r = r(t)$$

$$0 = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \quad (2) \qquad \theta = \theta(t)$$

calculons la quantité $\quad \frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} = 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = r\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)$

or d'après (2) on a

$$\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt}=r(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})=0 \quad r^2\dot{\theta}=r^2\dot{\theta}=Cte=h$$

On définit la loi des aires h par l'expression $h=r^2\dot{\theta}$

$$\dot{\theta}=\frac{h}{r^2} \quad on \quad a \quad f(r)=m(\ddot{r}-\frac{h^2}{r^3})$$

$$\boxed{\frac{f(r)}{m}=\ddot{r}-\frac{h^2}{r^3} \qquad r^2\dot{\theta}=h}$$

posons $u=\frac{1}{r}$ et faisant apparaître θ, $r(t)=r\rightarrow r=r(\theta(t))$

$$r=\frac{1}{u}$$

$$\dot{r}=\frac{-1}{u^2}\frac{du}{d\theta}.\dot{\theta}=\frac{-1}{u^2}\frac{du}{d\theta} \quad h \quad u^2=-h\frac{du}{d\theta}$$

$$\ddot{r}=-h\frac{d^2u}{d\theta^2}.\dot{\theta}=-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

$$\frac{f(r)}{m}=\frac{f(1/u)}{m}=-h^2.u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}h^2.u^3$$

$$\frac{f(1/u)}{m}=-h^2.u^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right]$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=-\frac{f(1/u)}{mh^2}\frac{1}{u^2}$$

on peut exprimer l'accélération γ par:

$$\gamma=\frac{f(r)}{m}e_r=-\left[\frac{mh^2u^2}{m}\right]\left[\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right].e_r$$

$$\boxed{\gamma=-h^2u^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right]e_r}$$ <u>2ème loi de Binet</u>

Il est possible aussi de touver une équation difféntielle $r=r(\theta)$ ou figure les dérivés par rapport à θ.

$U=\dfrac{1}{r}$,on obtient l'équation:

$$\left[\frac{d^2r}{d\theta^2}\right]-\frac{2}{r}\left[\frac{dr}{d\theta}\right]^2-r=\frac{r^4 f(r)}{mh^2}$$

1- f) Energie potentielle:

Examinons si les forces centrales dérivent d'un potentiel scalaire.Autrement dit vérifions que $Rot\vec{F}=\vec{\nabla}\wedge\vec{F}=\vec{0}$

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \qquad x^2+y^2=r^2$$

$$\vec{e_r}=\cos\theta\vec{e_x}+\sin\theta\vec{e_y}$$

$$\vec{F}=f(r)\vec{e_r} \quad ; \quad \vec{\nabla}\wedge\vec{F}=\begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f(r)\cos\theta & f(r)\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{f(r)x}{r} & \dfrac{f(r)y}{r} & 0 \end{vmatrix}$$

$$=0\vec{e_x}+0\vec{e_y}+\vec{e_z}\left[y.\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{f(r)}{r}\right]-x.\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{f(r)}{r}\right]\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f(r)}{r}\right)=\frac{d}{dr}\left(\frac{f(r)}{r}\right).\frac{dr}{dx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f(r)}{r}\right)=\frac{d}{dr}\left(\frac{f(r)}{r}\right).\frac{dr}{dy}$$

En différentiant l'équation $x^2+y^2=r^2$

$$2x.dx+2y.dy=2r.dr$$

$$\frac{x}{r}.dx+\frac{y}{r}.dr=dr=\frac{\partial r}{\partial x}.dx+\frac{\partial r}{\partial y}.dy+\frac{\partial r}{\partial z}.dz$$

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r} \qquad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f(r)}{r}\right)=\frac{x}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{f(r)}{r}\right) \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f(r)}{r}\right)=\frac{y}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{f(r)}{r}\right) \end{cases}$$

enfin $\vec{rot}\vec{F}=0$

les forces centrales dérivent d'un potentiel scalaire cherchons ce potentiel:

$$\vec{F}=-\vec{grad}V=-\vec{\nabla}.V$$

$$\vec{F}.d\vec{r}=-dV=-\frac{\partial V}{\partial x}.dx-\frac{\partial V}{\partial y}.dy-\frac{\partial V}{\partial z}.dz$$

$$\vec{r}=r\vec{e_r} \quad , \quad d\vec{r}=dr\vec{e_r}+rd\theta\vec{e_\theta}$$

$$d\vec{e_r}=\frac{d\vec{e_r}}{d\theta}.d\theta=\vec{e_\theta}.d\theta$$

$$\vec{F}=f(r)\vec{e_r} \qquad f(r)dr=\vec{F}.d\vec{r}$$

$$\rightarrow f(r)dr=-dV\rightarrow \quad f(r)=\frac{-dV}{dr}$$

$$\boxed{V=-\int f(r)dr}$$

1- g) Energie totale:

Appliquons le théorème de la conservation de l'énergie totale

$$T+V=E=\frac{1}{2}mV^2(M|_R)+V$$

$$V(M|_R)=\dot{r}e_r+r\dot{\theta}e_\theta$$

$$mV^2(M|_R)=\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2$$

$$\dot{\theta}=\frac{h}{r^2}=V^2(M|_R)=\dot{r}^2+\frac{h^2}{r^2}$$

$$\boxed{E=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+\frac{h^2}{r^2})+V}$$

V - 2: Problème de Kepler

2 1: Kepler a énoncé les lois expérimentales astronomique suivantes:

*** 1ère loi**

Toute planète du système solaire décrit une orbite elliptique dont le soleil occupe un foyer. Les planètes les plus proches du soleil: Mercure, Vénus, Terre, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus , Neptune, Pluton.

*** 2 ème loi:**

Le rayon vecteur tracé à partir du soleil à la planète considéré balaye des aires proportionnelle aux temps mis pour les parcourir (t=temps).

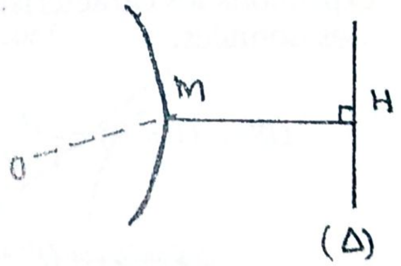
*** 3ème loi:**

Les carrés des périodes de résolution des planètes autour du soleil sont proportionnelles aux cubes des grands axes de leur trajectoire,

2 - 2: Rappel sur les coniques:

Une conique est le lieu des points M tel que le rapport de ces distances à un point fixe O à une droite Δ fixe soit constant,

$$\frac{OM}{MH} = cte$$



O: centre ou foyer de la conique
Δ : est appellée directrice.
ε= excentricité.

Il existe 3 types de conique suivant la valeur de ε.

$\varepsilon=1$: la conique est une parabole,
$\varepsilon>1$: la conique est une hyperbole,
$\varepsilon<1$: la conique est une ellipse.

Soit D la distance de O à la directrice , $r = OM$

$$\frac{OM}{MH}=\frac{r}{D-r\cos\theta}=\varepsilon \qquad \rightarrow r=\varepsilon D-r\varepsilon\cos\theta$$

$$\rightarrow r=\frac{\varepsilon D}{1+\varepsilon\cos\theta}$$

C'est la trajectoire d'une conique en coordonnées polaires, rapporté à son foyer.

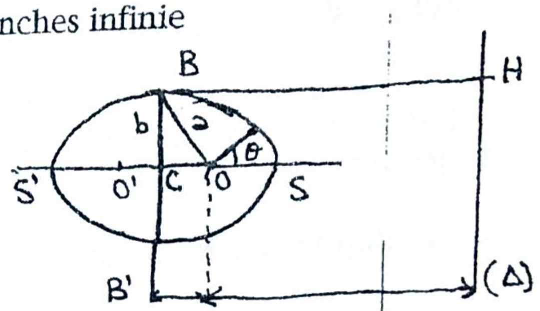
$$p=r(\theta=\pi/2)=\varepsilon D\rightarrow r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\theta}$$

a) Ellipse:

$$r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\theta} \qquad \varepsilon<1 \quad donc \quad -1<\varepsilon\cos\theta<1$$

$$\rightarrow 1+\varepsilon\cos\theta>0 \quad \rightarrow r>0$$

La courbe ne présente pas de branches infinie
soit C centre de l'ellipse
SS' = 2a = grand axe
BB' = 2b= petit axe
OO' = distance interfocale = 2c
S,S' sommets de l'ellipse,



Exprimons les caractéristiques d'une ellipse en fonction des données.

$$OS=r(\theta=0)=\frac{p}{1+\varepsilon} \qquad OS'=r(\theta=\pi)=\frac{p}{1-\varepsilon}$$

$$SS'=2a=OS+S'O=p\left[\frac{1}{1+\varepsilon}-\frac{1}{1-\varepsilon}\right]=\frac{2p}{1-\varepsilon^2}$$

donc $\boxed{a=\frac{p}{1-\varepsilon^2}}$

$$OO'=SS'-2OS=\frac{2p}{1-\varepsilon^2}-\frac{2p}{1+\varepsilon}=\frac{2p\varepsilon}{1-\varepsilon^2}=2c$$

$$\boxed{c = \frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2} = \varepsilon a}$$

$$\frac{OB}{BH} = \varepsilon \rightarrow BH = c + D = a\varepsilon + \frac{p}{\varepsilon} \quad ,car \qquad (p = \varepsilon D)$$

$$OB = a\varepsilon^2 + p = \frac{p\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} + p = p\left[\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} + 1\right] = \frac{p}{1-\varepsilon^2}$$

$$\boxed{OB = \frac{p}{1-\varepsilon^2} = a} \qquad \boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

b) Parabole $\varepsilon = 1$

La parabole a pour équation : $r = \frac{p}{1+\cos\theta}$

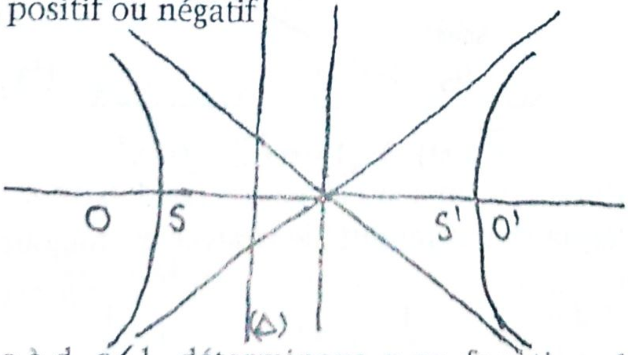
$(1+\cos\theta)$ peut s'annuler pour $\theta = \pi$ $\Rightarrow r \rightarrow \infty$, c.à.d la parabole présente des branches infini. .

$$OS = r(\theta = 0) = \frac{p}{2} = \frac{D}{2}$$

c) Hyperbole $\varepsilon > 1$

l'hyperbole à pour équation $r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\theta}$

$1+\varepsilon\cos\theta$, positif ou négatif



Dans le cas 1) c.à.d $\varepsilon < 1$, déterminons r en fonction de ε et a uniquement.

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\theta} \qquad p = a(1-\varepsilon^2)$$

$$\boxed{r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos\theta}}$$

2 - 3: Expression de la force d'attraction universelle:

Nous vous proposons de trouver l'expression de la force d'attraction à partir de loi de Kepler et de Newton. D'après la 2ème loi de Kepler ou encore la loi des aires.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{h}{2} = \frac{r^2\dot{\theta}}{2} = cte$$

$$\rightarrow 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0$$

$$\rightarrow 2\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0$$

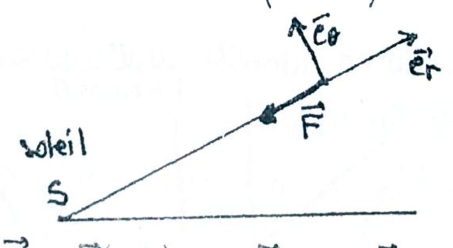
$\vec{\gamma}(M|_R)$ en coordonnées polaires s'écrit

$$\vec{\gamma}(M|_R) = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e_r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\vec{e_\theta}$$

$$\vec{\gamma}(M|_R) = \gamma_r\vec{e_r} + \gamma_\theta\vec{e_\theta}$$

$$or \qquad \gamma_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0$$

$$donc \qquad \vec{\gamma}(M|_R) = \gamma_r\vec{e_r} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e_r}$$



Loi de Newton $\qquad \vec{F} = m\vec{\gamma}(M|_R) = m\gamma_r\vec{e_r} = f(r)\vec{e_r}$

En particulier l'équation différentielle trouvée est toujours valable.

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{-1}{mh^2u^2}\cdot f\left(\frac{1}{u}\right) \qquad ; \qquad u = \frac{1}{r}$$

1ère loi de Kepler → trajectoire est une ellipse

Donc elle peut s'ecrire sous forme:

$$r=\frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos\theta} \qquad u=\frac{1}{r}=\frac{1}{a(1-\varepsilon^2)}+\frac{\varepsilon\cos\theta}{a(1-\varepsilon^2)}$$

$$\frac{du}{d\theta}=\frac{-\varepsilon\sin\theta}{a(1-\varepsilon^2)} \qquad \frac{d^2u}{d\theta^2}=\frac{-\varepsilon\cos\theta}{a(1-\varepsilon^2)}$$

$$\frac{1}{a(1-\varepsilon^2)}=\frac{-1}{mh^2u^2}f(1/u)\rightarrow f(1/u)=\frac{-mh^2u^2}{a(1-\varepsilon^2)}$$

$$f(r)=\frac{-mh^2}{a(1-\varepsilon^2)}\cdot\frac{1}{r^2} \qquad \vec{F}=f(r).\vec{er}$$

Appliquons la 3ème loi de Kepler $P=Ka^3$; $K=cte$

(P période; a = grand axe de l'ellipse) c.à.d qu'elle ne varie pas d'une planète à l'autre.`

$$P=\frac{A_{ellipse}}{\left(\frac{dA}{dt}\right)}$$

l'aire d'une ellipse $A=\pi.a.b$

$$P=\frac{\pi.a.b}{h/2} \qquad P^2=\frac{4\pi^2.a^2.b^2}{h^2}=K.a^3$$

on élimine b, *or* $a^2=b^2+c^2\rightarrow b^2=a^2-c^2$, $c=a\varepsilon$

$$b^2=a^2(1-\varepsilon^2)$$

$$\frac{4\pi^2.a^4(1-\varepsilon^2)}{h^2}=K.a^3 \quad \rightarrow K=\frac{4\pi^2.a\,(1-\varepsilon^2)}{h^2}=cte$$

K ne dépend pas de la planète considérée

$$\vec{F}=f(r)\vec{e_r}=\frac{-mk}{r^2}\vec{e_r} \quad , \quad K=4\pi^2k^{-1} \quad , \quad K=\frac{h^2}{a(1-\varepsilon^2)}$$

cherchons la force qui s'exerce sur le soleil due à l'existence de la planète P. d'après le $3^{ème}$ principe de Newton (principe de l'action et la réaction).

$$\vec{F}=+\frac{mk}{r^2}\vec{e}_r,$$ cette force doit être proportionnelle à la masse du soleil.

$$\vec{F}=+\frac{mk}{r^2}.\vec{e}_r=\frac{Mk}{r^2}.\vec{e}_r \rightarrow \vec{F}=\frac{GmM}{r^2}.\vec{e}_r \quad , \quad G=cte$$

la force qui s'exerce sur la planète:

$$\vec{F}_{planète}=-\frac{GmM}{r^2}\vec{e}_r \quad ; \quad G=cte=6,673.10^{-11}.S.I.$$

2 - 4: Energie potentielle:

l'energie potentielle

$$V=-\int f(r)dr$$
$$f(r)=-\frac{GmM}{r^2}$$
$$V=+GmM\int\frac{dr}{r^2}=-\frac{GmM}{r}+cte$$

On convient de dire que lorsque la distance qui sépare les deux masses est infini, l'énergie potentielle d'attraction est nulle, et on écrit:

$$V=\frac{-GmM}{r}$$

$$V<0 \rightarrow T>0 \qquad T=\tfrac{1}{2}mv^2(M|_R)$$

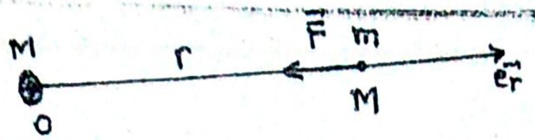
$$E_m=T+V \quad ; \quad E_m>0 \quad ou \quad <0 \quad ou=0$$

$E_m<0$, on dit que l'on a un système lié.

$E_m>0$, on dit que l'on a un système non lié.

2 - 5: Trajectoire du mouvement d'un point matériel dans un champ gravitationnel en fonction de l'énergie:

Considérons un point matériel de masse m sur lequel une autre masse M exerce une force d'attraction gravitationnelle (M peut représenter par exemple le soleil si le point matériel m se trouve dans le système solaire). M peut être aussi la masse de la terre, si m se trouve dans le champ d'attraction terrestre.



$\vec{F}$ est une force centrale d'où les équations de mouvements de la force centrale.

$$\frac{du^2}{d\theta^2}+u=\frac{-1}{mh^2u^2}f(1/u) \quad ou\frac{1}{u}=r \quad et \quad h=r^2\,\dot{\theta}$$

$$F=f(r)e_r \rightarrow \quad f(r)=\frac{-GmM}{r^2}=--GmMu^2$$

$\frac{du^2}{d\theta^2}+u=\frac{GM}{h^2}$ c'est une équation différentielle $S.O.L.A.S.M$

La solution $G.E.S.S.M$

$$\frac{du^2}{d\theta^2}+u=0 \qquad u_1=A.\cos\theta+B.\sin\theta$$

une solution $P.E.D.A.S.M$

$$u_2=\frac{GM}{h^2}$$

la $S.G.E.D.A.S.S.M$ $\qquad u=u_1+u_2$

$$u=\frac{GM}{h^2}+A.\cos\theta+B.\sin\theta$$

ou

$$u=\frac{GM}{h^2}+C.\cos(\theta-\varphi) \qquad avec \qquad C=\sqrt{A^2+B^2}$$

$$\tan\varphi=\frac{B}{A}$$

$$r=\frac{1}{u}=\frac{1}{GM/h^2+C.\cos(\theta-\varphi)}$$

$$r=\frac{h^2/GM}{1+\frac{Ch^2}{GM}.\cos(\theta-\varphi)} \qquad \frac{h^2}{GM}=P; \quad \frac{Ch^2}{GM}=\varepsilon; \quad \theta-\varphi=\Theta$$

$$r=\frac{P}{1+\varepsilon.\cos\Theta}$$

Ceci représente l'équation d'une conique en coordonnées polaires.rapportié à un foyer.

2 - 6: Nature de cette conique en fonction de l'énergie totale E_m:

Autrement dit, on doit trouver une relation entre ε, et E_m.
Pour cela, utilisons l'équation différentielle contenant E_m
La relation de Binet s'écrit:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u^2=\frac{2(E_m-V)}{mh^2}$$

$$V=-\int f(r).dr=-\frac{GmM}{r}=-GmMu$$

$$u=\frac{1+\varepsilon.\cos\theta}{p} \qquad = \frac{du}{d\theta}=\frac{du}{d\theta}=\frac{-\sin\theta}{p}$$

$$\frac{\varepsilon^2.\sin^2\theta}{p^2}+\frac{1+\varepsilon^2.\cos^2\theta+2\varepsilon.\cos\theta}{p^2}=\frac{2}{mh^2}\left[E_m+\frac{GmM(1+\varepsilon.\cos\theta}{p}\right]$$

$$\frac{\varepsilon^2}{p^2}+\frac{1}{p^2}+\frac{2\varepsilon.\cos\theta}{p^2}=\frac{2E_m}{mh^2}+\frac{2GM}{ph^2}+\frac{2GmM\varepsilon.\cos\theta}{mh^2p}$$

$$\frac{2\varepsilon.\cos\theta}{p^2}$$

$$\varepsilon^2+1=\frac{2E_mp^2}{mh^2}+2$$

$$\rightarrow \varepsilon^2=1+\frac{2E_mh^4}{mh^2G^2M^2}$$

$$\varepsilon=\sqrt{1+\frac{2E_mh^2}{mG^2M^2}}$$

1- Lorsque $E_m < 0 \rightarrow \varepsilon^2 < 0 \rightarrow$, trajectoire est une ellipse (cas lié).

2- lorsque $E_m = 0 \rightarrow \varepsilon^2 = 1 \rightarrow \varepsilon = 1 \rightarrow$ trajectoire est une parabole (cas non lié).

3- lorsque $E_m > 0 \rightarrow \varepsilon^2 > 1 \rightarrow$, trajectoire est une hyperbole (cas non lié).

On peut écrire l'expression précédente d'une autre manière.

$$\boxed{E_m = -\frac{K_1(1-\varepsilon^2)}{2p}} \text{ avec } K_1 = mMG \quad et \quad p = \frac{h^2}{GM}$$

Lorsque la trajectoire est elliptique, nous avons:

$$E_m = \frac{-K_1}{2a} \qquad ,puique \qquad p = \frac{a}{1-\varepsilon^2}$$

la variation de la vitesse sur l'ellipse:
l'équation définissant l'énergie mécanique

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{K_1}{r} = -\frac{K_1}{2a}$$

donne, $$v^2 = \frac{K_1}{m}.\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right) = \quad K_1\left[\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right]$$

Donc la vitesse est maximale au périgée (point le plus proche) et minimale à l'apogée (point le plus éloigné).

Dans le cas particulier ou $\varepsilon = 0$, l'ellipse se réduit à un cercle de rayon r_0 correspondant au minimum de l'énergie potentielle.

$$E_m = \frac{-K_1}{2r_0} \qquad avec \qquad Ep = \frac{-K_1}{r_0}$$

on a $E_m = -Ec = \frac{Ep}{2}$

Cette relation entre E_m , Ec et Ep est caractéristique du mouvement circulaire dans le problème de Kepler.

3 - Satellites de la terre

Depuis 1958 de nombreux satellites artificiels ont été envoyés autour de la terre. comme leur masse Ms est trés faible devant la masse de la terre , leurs mouvements satisfont à des lois du type "loi de Kepler".

La terre possède un satellite naturel, la lune.

3 - 1: Vitesse d'évasion:

la vitesse d'evasion ou vitesse de libération est la vitesse minimale pour laquelle l'état du satellite est libre, l'orbite est alors parabolique et l'énergie mécanique est nulle:

$$E_m = \frac{1}{2} m_s . V_l^2 - \frac{K_1}{r} = 0 \quad d'où$$

$$V_l = \sqrt{\frac{2K_1}{m_s r}} = \left(\frac{2G(m_s + M_T)}{r}\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{2GM_T}{r}\right)^{1/2}$$

m_s: masse de la satellite.
M_T: masse de la terre.

Notons que cette vitesse dépend de r, sur le sol terrestre, la vitesse d'évassion d'un engin spatial est, puisque:

$$R_T = 6,4.10^6 m \qquad et \qquad M_T = 6.10^{24} kg$$

$$V_l = 11,2 Km/s$$

Si la vitesse communiquée au sol ou près du sol est inférieure à la vitesse d'évation, la trajectoire du satellite est une ellipse qui passe par le point de lancement.

Pour mettre sur orbite terrestre un satellite, on doit procéder en deux temps:

(1) : dans une première phase, dite balistique, l'engin s'éloigne de la terre sur une ellipse de foyer T jusqu'au point choisi de la trajectoire, par exemple l'apogée.

(2) : dans une seconde phase, la satellisation, on communique au satellite on accroissement de vitesse qui lui permet d'avoir une trajectoire circulaire autour de la terre.

3 - 2: Energie d'un satellite en mouvement circulaire

L'énergie mécanique est appelée énergie de satellisation.
Elle est donnée par la relation:

$$E_m = -E_c = \frac{-Ep}{2} = \frac{K_1}{2r_0}$$

$$E_m = \frac{-Gm_s M_T}{2r_0}$$

La vitesse de satellisation est donnée par: (voir T.D)

$$V_s = \frac{V_l}{\sqrt{2}}$$